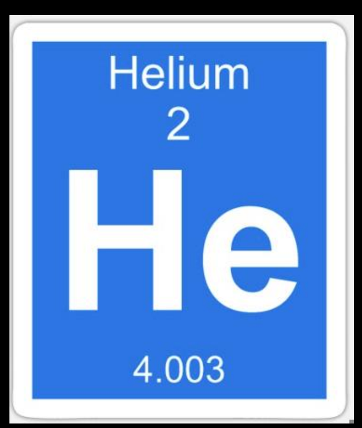
DIRE L'INDICIBILE
l'entanglement quantistico

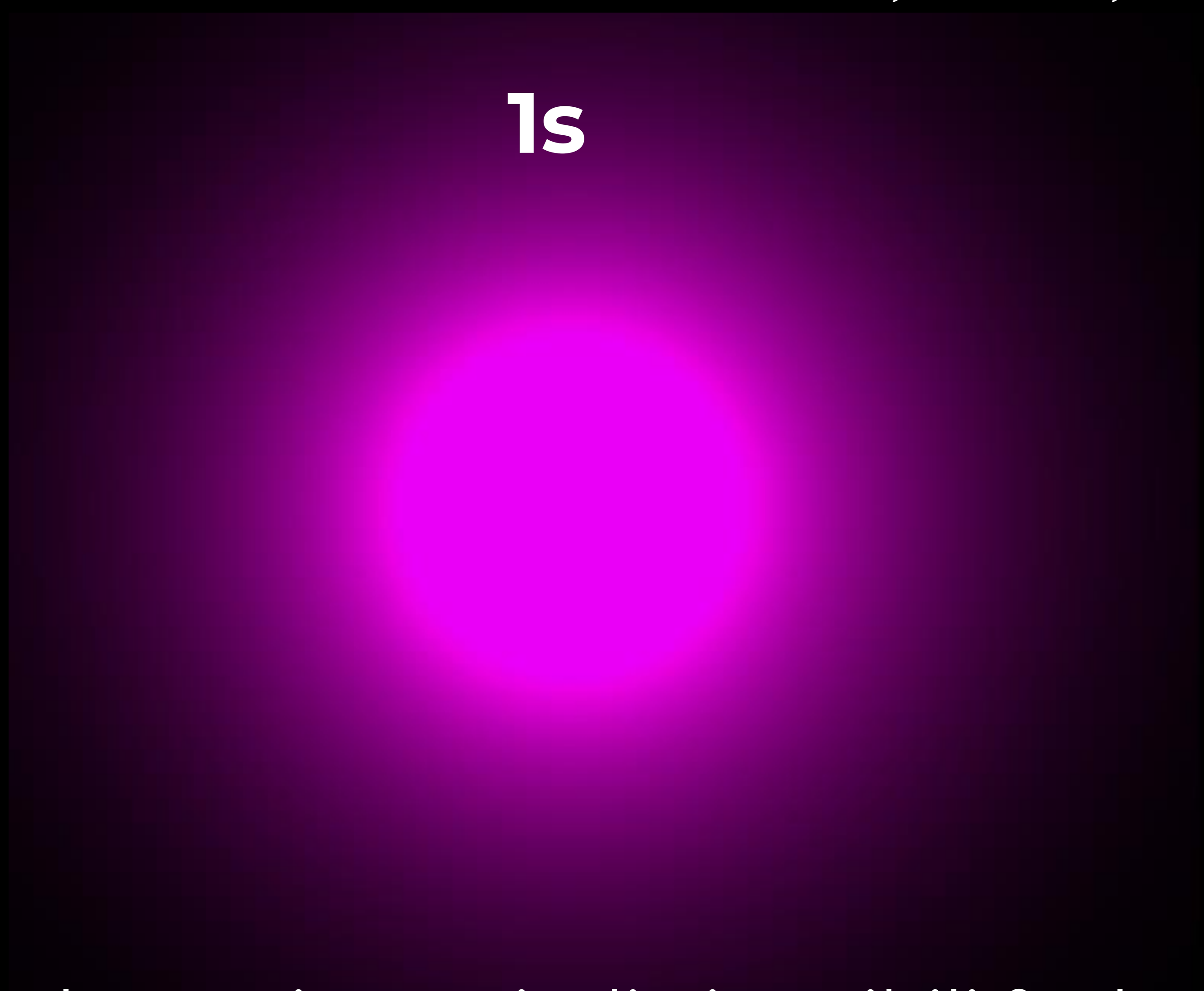
ITALIAN QUANTUM WEEKS

IL CASO DELL'ATOMO DI ELIO
Stati entangled

Che cosa succede quando abbiamo un sistema con due elettroni?

Principio di esclusione di Pauli
Due elettroni non possono occupare lo stesso stato quantistico. La loro funzione d'onda cambia di segno se scambiamo fra loro le particelle: $\psi_{1,2} = -\psi_{2,1}$





In un atomo di Elio ci sono due elettroni.

Entrambi occupano l'orbitale più interno, 1s, con orientazione opposta del loro spin.

Se un elettrone ha spin $|\uparrow_z\rangle$ in direzione z, l'altro avrà spin $|\downarrow_z\rangle$

Abbiamo due possibili stati di spin totale

$$|\uparrow_z\rangle_1 |\downarrow_z\rangle_2 \qquad |\downarrow_z\rangle_1 |\uparrow_z\rangle_2$$

Siccome gli elettroni sono indistinguibili fra loro, e deve valere il principio di Pauli, il loro **stato di spin** è la **sovrapposizione dei due possibili stati**.

$$|\psi_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_z\rangle_1 |\downarrow_z\rangle_2 - |\downarrow_z\rangle_1 |\uparrow_z\rangle_2\right)$$

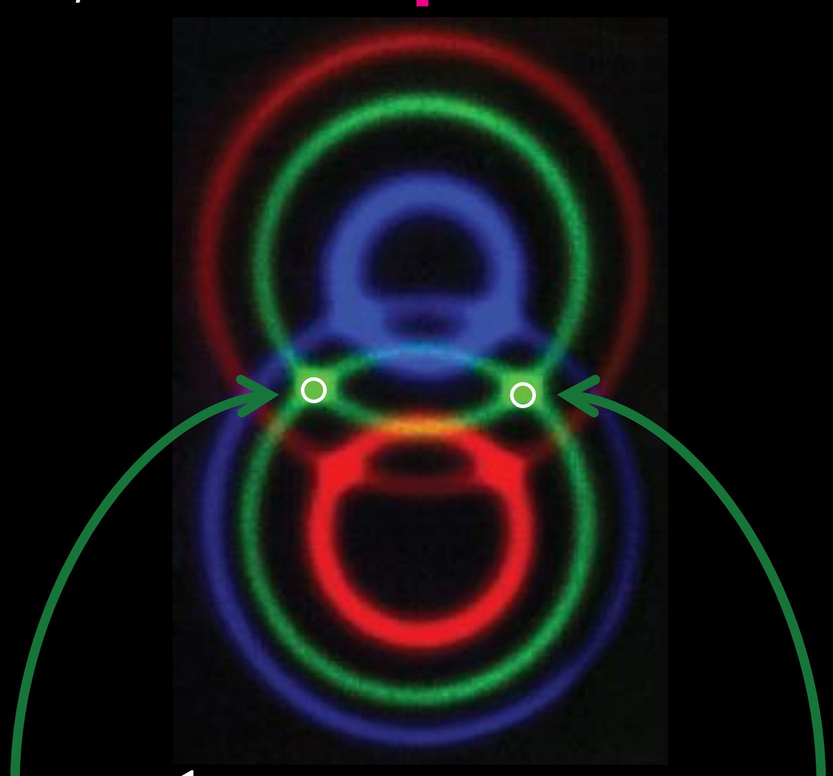
Questo è un esempio di stato entangled

Lo **stato entangled** non si può scrivere come prodotto degli stati dei singoli elettroni.
Si dice che **non è fattorizzabile** $\psi_{1,2} \neq \psi_1 \psi_2$.

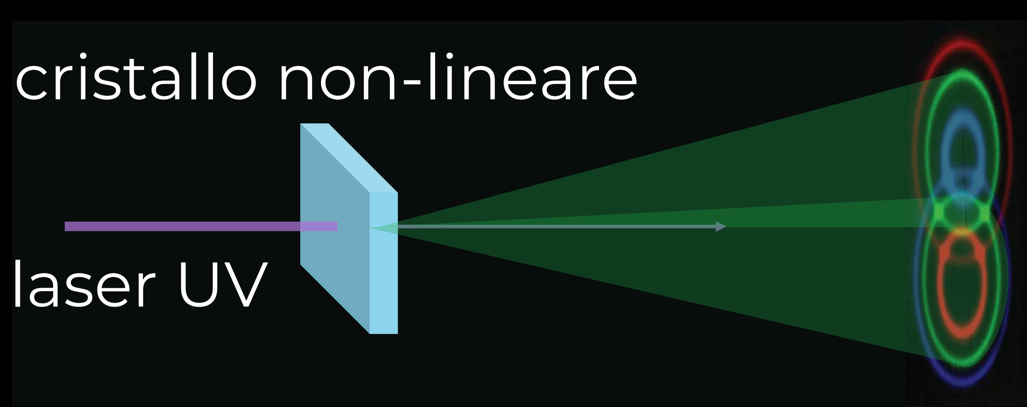
Lo stato di spin dei due elettroni rimane entangled anche sulle altre direzioni (x e y).
➡ Sistemi entangled possono avere **valori correlati di proprietà incompatibili**.

Ci sono altri sistemi che possono essere in stati entangled, ad esempio coppie di fotoni. A differenza degli elettroni dell'Elio, **i fotoni possono essere entangled anche a grandi distanze.**

Il processo di "down conversion di tipo II" produce **coppie di fotoni entangled** in polarizzazione.
Lo stato della coppia di fotoni all'intersezione fra l'anello superiore (polarizzato verticalmente) e l'anello inferiore (polarizzato orizzontalmente) è:



$$|\psi_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle_1 |V\rangle_2 + |V\rangle_1 |H\rangle_2\right)$$



DIRE L'INDICIBILE
l'entanglement quantistico

ITALIAN QUANTUM WEEKS

IL GATTO DI SCHRÖDINGER: VIVO, MORTO OPPURE...?
Entanglement macroscopico

Nel 1935, Erwin Schrödinger descrisse il caso di un **oggetto macroscopico**, un gatto, **in uno stato entangled** con un sistema microscopico quantistico. L'esperimento pensato porta a conseguenze che Schrödinger riteneva paradossali.

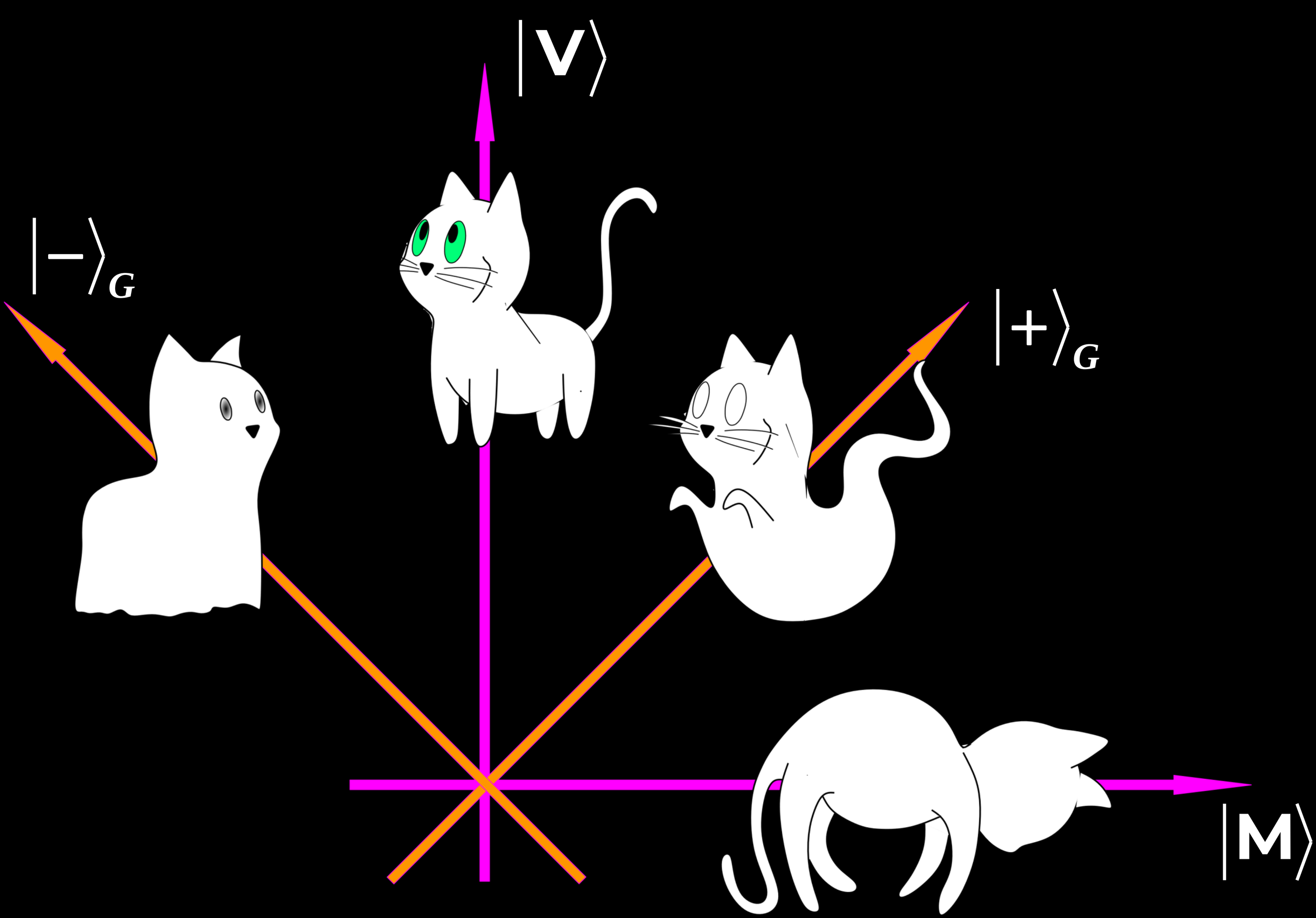
Di solito osserviamo solo lo "stato di esistenza" ($|\mathbf{V}\rangle$ = vivo, $|\mathbf{M}\rangle$ = morto) di un gatto. Ma il **gatto di Schrödinger** può essere descritto anche da una proprietà, che possiamo chiamare "stato paranormale", incompatibile con lo "stato di esistenza".

Rispetto a questa proprietà il gatto può essere ($|+\rangle_G$ = ectoplasma, $|-\rangle_G$ = fantasma)

$$|+\rangle_G = \frac{|\mathbf{V}\rangle + |\mathbf{M}\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |-\rangle_G = \frac{|\mathbf{V}\rangle - |\mathbf{M}\rangle}{\sqrt{2}}$$

Il gatto di Schrödinger può essere né vivo né morto!

Come si ottiene un gatto $|+\rangle_G$?



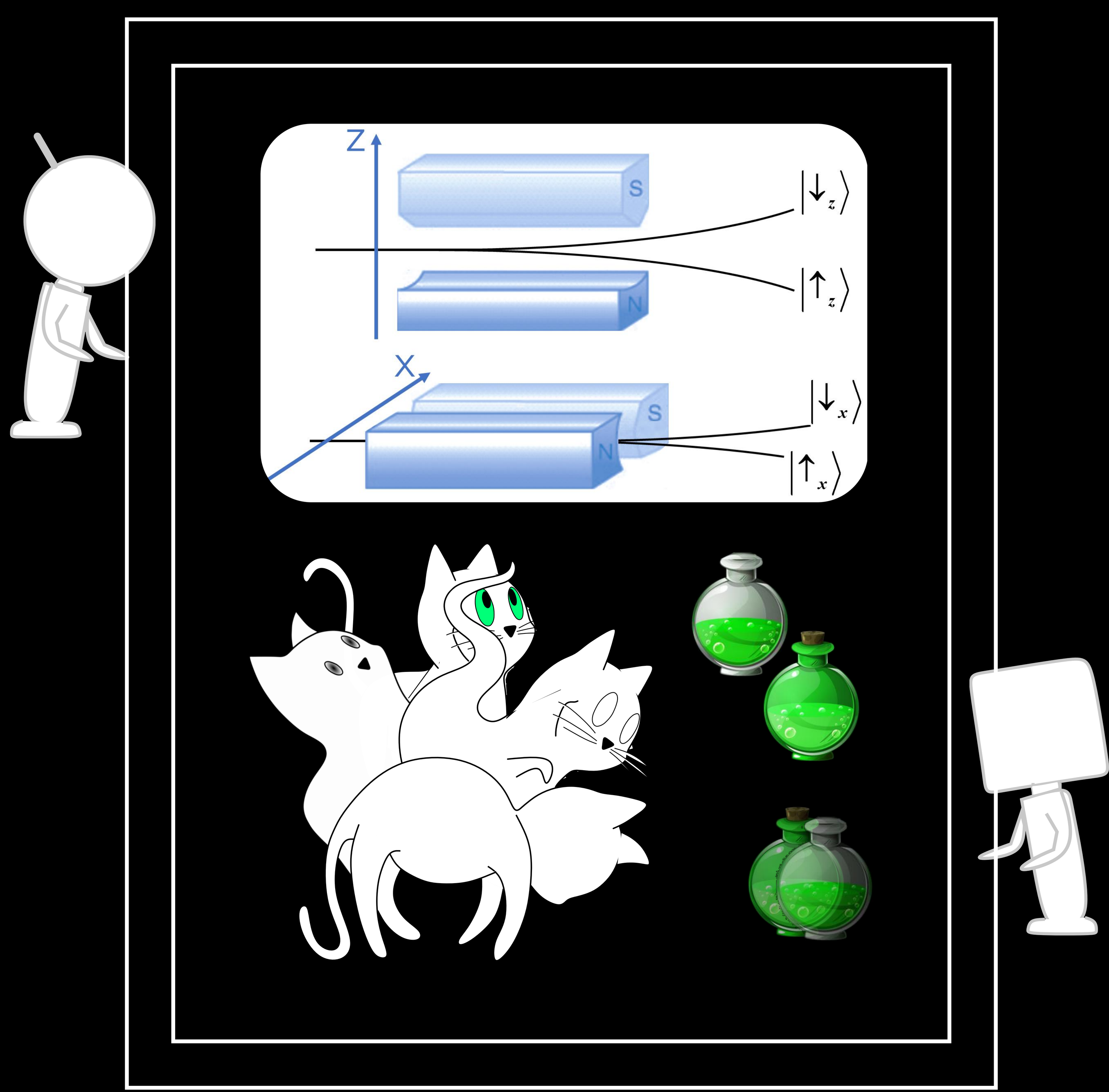
Mettete un **gatto in una scatola perfettamente isolata** assieme ad una **boccetta di veleno** e ad un **elettrone**.
L'elettrone, il veleno e il gatto interagiscono.
Se l'elettrone è nello stato di spin $|\downarrow_z\rangle$, la boccetta si apre uccidendo il gatto.
Classicamente avremmo due stati del sistema nella scatola
- spin verso l'alto e gatto vivo $|\uparrow_z\rangle|\mathbf{V}\rangle_G$
- spin verso il basso e gatto morto $|\downarrow_z\rangle|\mathbf{M}\rangle_G$

Tuttavia, Lo spin dell'elettrone è una proprietà quantistica che può trovarsi in uno stato di sovrapposizione, ad esempio

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |\downarrow_x\rangle = \frac{|\uparrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle}{\sqrt{2}}$$

Dato che l'elettrone interagisce con il gatto, lo stato del sistema nella scatola diventa lo **stato entangled**

$$|\Psi_{el,G}\rangle = \frac{|\uparrow_z\rangle|\mathbf{V}\rangle_G + |\downarrow_z\rangle|\mathbf{M}\rangle_G}{\sqrt{2}} = \frac{|\uparrow_x\rangle|+\rangle_G + |\downarrow_x\rangle|-\rangle_G}{\sqrt{2}}$$



Con un apparato di Stern-Gerlach orientato lungo x, possiamo trovare l'elettrone nello stato $|\uparrow_x\rangle$ e quindi il gatto nello stato $|+\rangle_G$ (ectoplasma), oppure l'elettrone nello stato $|\downarrow_x\rangle$ e il gatto nello stato $|-\rangle_G$ (fantasma).
In entrambi i casi né vivo né morto!

Osservare il gatto nello stato $|+\rangle_G$ è molto complicato (nel nostro esempio richiederebbe un'osservazione da acchiappafantasmi!).

Possiamo solo osservare lo stato di esistenza: aprendo la scatola troveremo sempre il gatto vivo o morto!

I sistemi macroscopici, come i gatti, non permangono in stati di sovrapposizione a causa della **decoerenza** che li rende sistemi classici.

DIRE L'INDICIBILE
l'entanglement quantistico

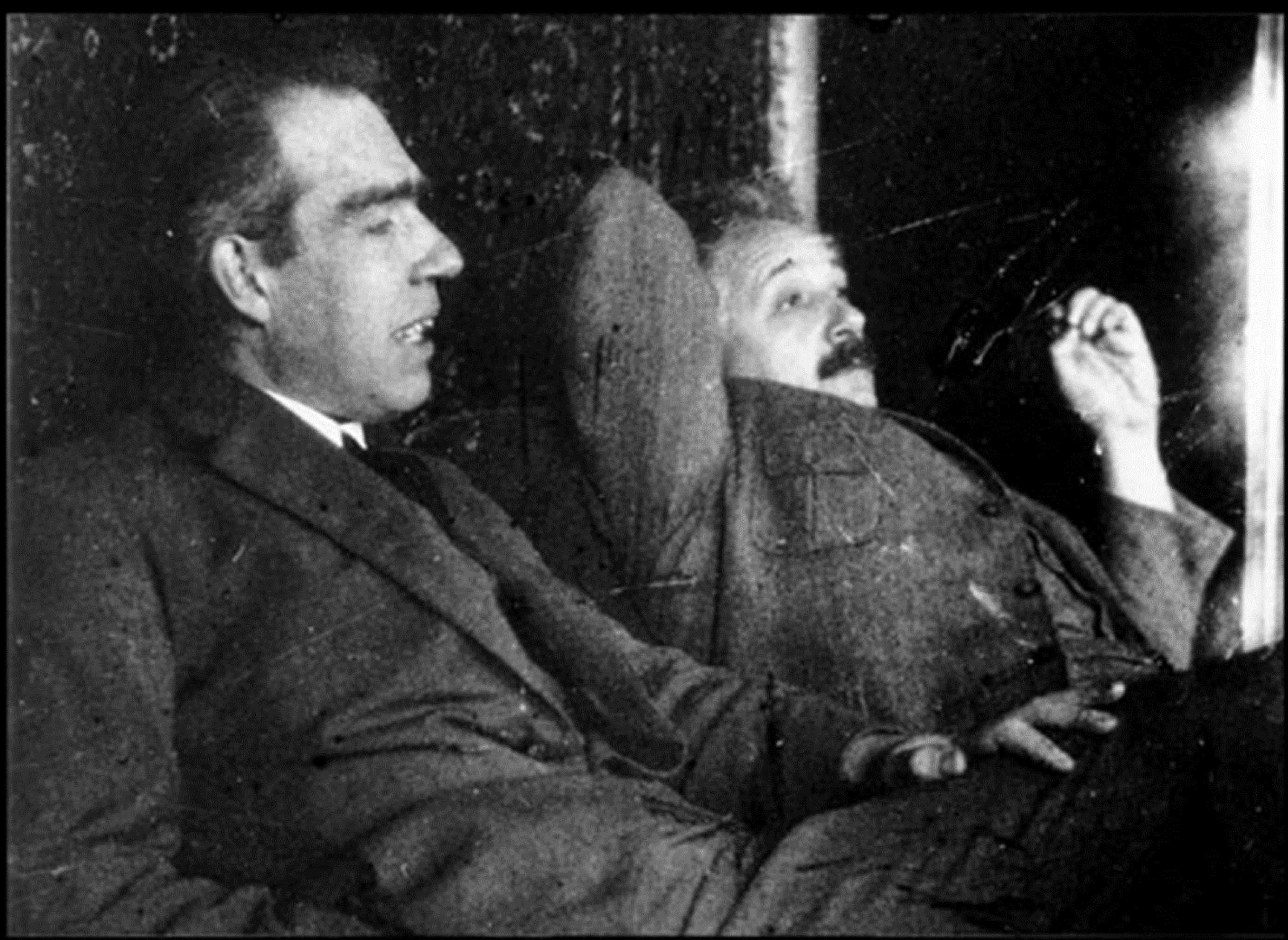
ITALIAN QUANTUM WEEKS

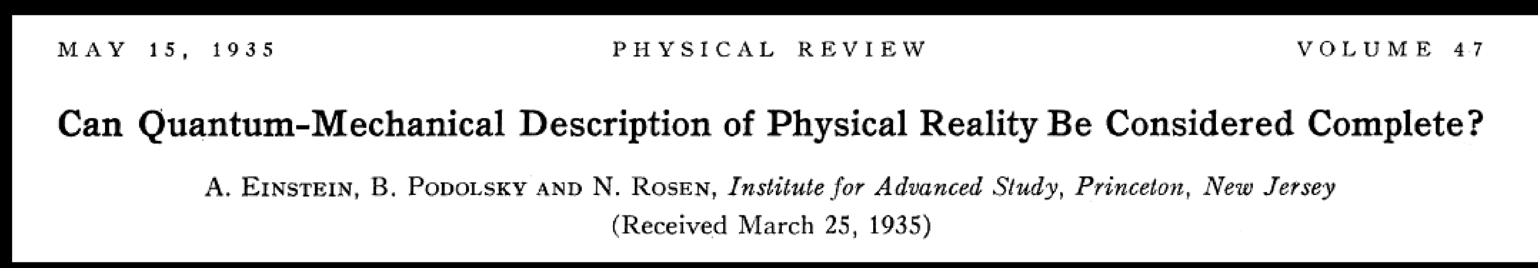
L'INIZIO DELLA STORIA
Il paradosso EPR

Il termine **entanglement** (Verschränkung) fu coniato da Erwin Schrödinger in una lettera del 1935 ad Albert Einstein "per descrivere le correlazioni tra due particelle che interagiscono e poi si separano."

"Non chiamerei [l'entanglement] **uno** ma piuttosto **il** tratto caratteristico della meccanica quantistica, quello che rafforza tutto il suo allontanamento dalle linee di pensiero classiche."

E. Schrödinger




MAY 15, 1935 PHYSICAL REVIEW VOLUME 47

Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*
(Received March 25, 1935)

Nel 1935 Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) propongono un **esperimento mentale** (Gedankenexperiment) in cui mostrano che la meccanica quantistica è **incompleta** o in contraddizione con alcune ipotesi ragionevoli sulla realtà fisica: **realismo** e **località**.

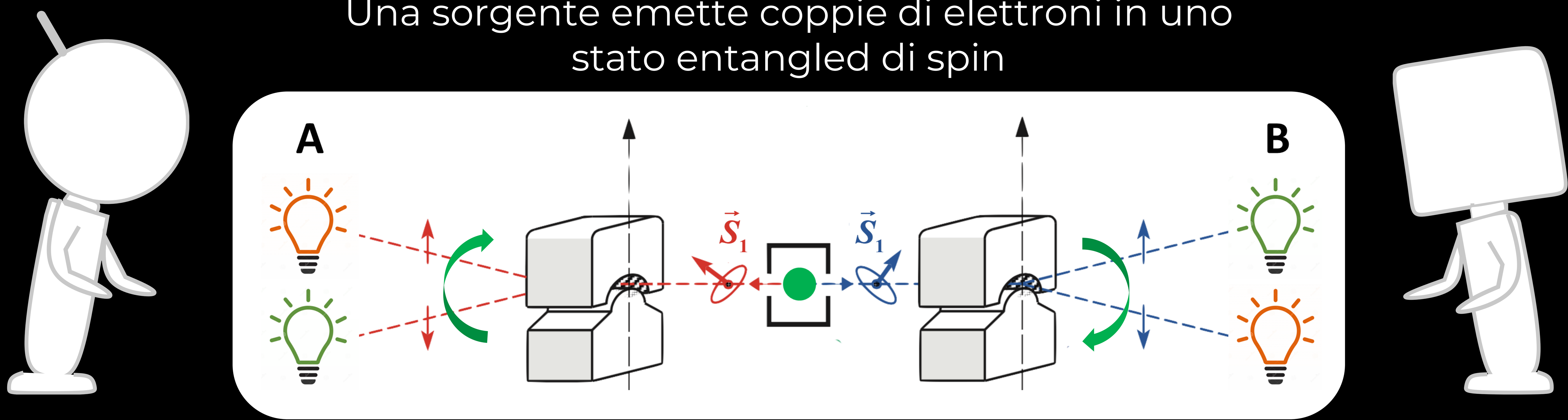
Questo risultato è noto come PARADOSSO EPR

Realismo secondo EPR
Se possiamo predire con certezza il risultato di una misura su un sistema senza interagire in alcun modo con esso, la misura deve corrispondere ad una proprietà reale.

Località:
L'informazione derivante da una misura su uno di due sistemi isolati non può produrre un cambiamento reale nell'altro, ovvero le misure di B non possono dipendere dalle misure di A.

SCHEMA ESPERIMENTO EPR

Una sorgente emette coppie di elettroni in uno stato entangled di spin



$$|\psi_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\right)$$

Alice e Bob misurano lo spin in direzioni diverse che corrispondono a **proprietà incompatibili**.

DIRE L'INDICIBILE
l'entanglement quantistico

ITALIAN QUANTUM WEEKS

LE CONSEGUENZE DEL REALISMO
Le disuguaglianze di Bell

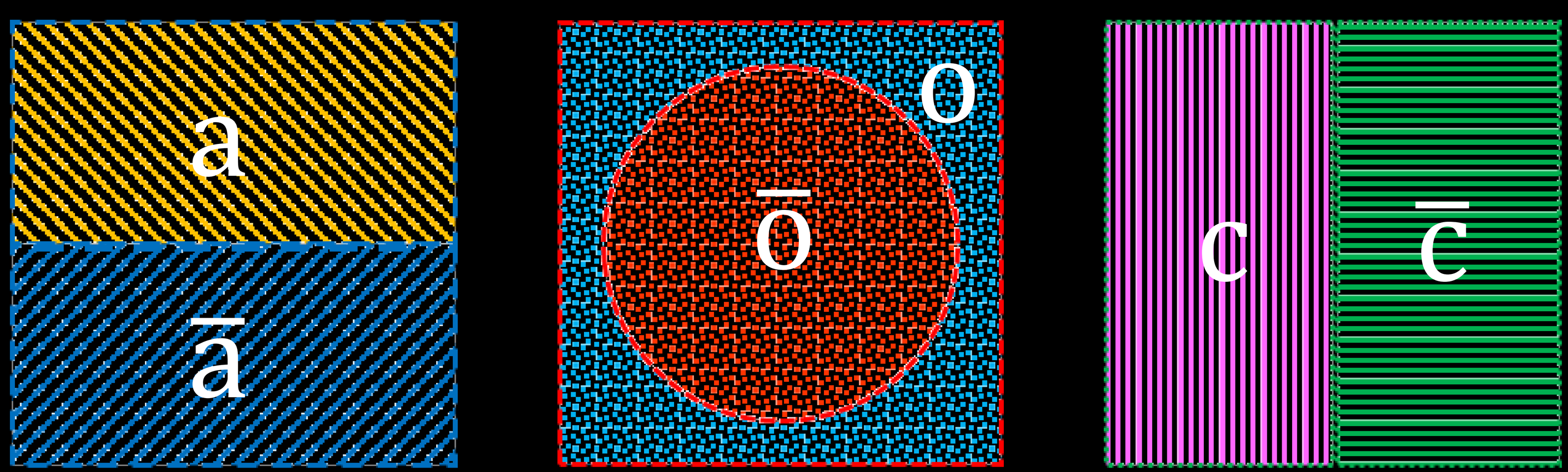
Assumendo i principi di **realismo** e **località** postulati da EPR, nel 1964 John Bell derivò delle disuguaglianze di validità generale che devono essere soddisfatte da tutti i sistemi che rispettano i due principi.

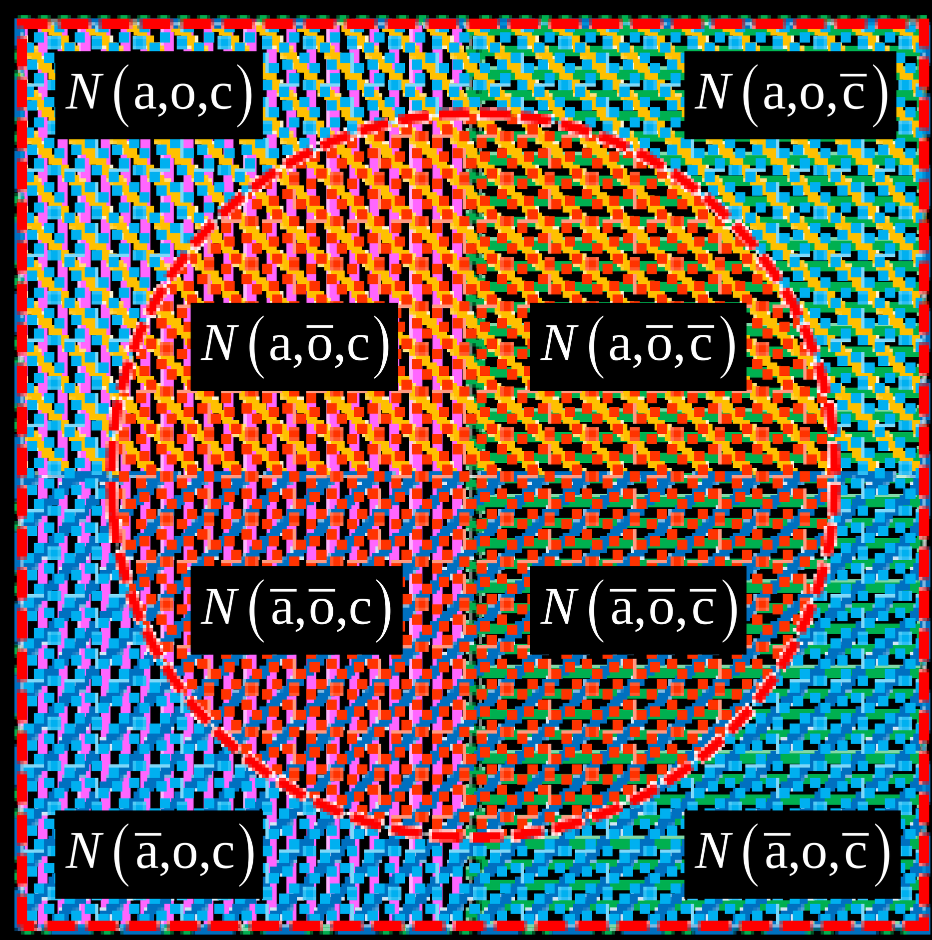
Consideriamo un insieme di N_{TOT} persone con tre caratteristiche misurabili A, O e C, che possono valere:

a : essere alti più di 1.70 m
o : avere gli occhi azzurri
c : avere i capelli neri

$\bar{\mathrm{a}}$: non essere alti più di 1.70 m
$\bar{\mathrm{o}}$: non avere gli occhi azzurri
$\bar{\mathrm{c}}$: non avere i capelli neri

L'insieme può essere diviso in due parti rispetto a ciascuna delle proprietà.





$N(\mathrm{a,o,c})$ = numero di elementi che ha simultaneamente le tre proprietà

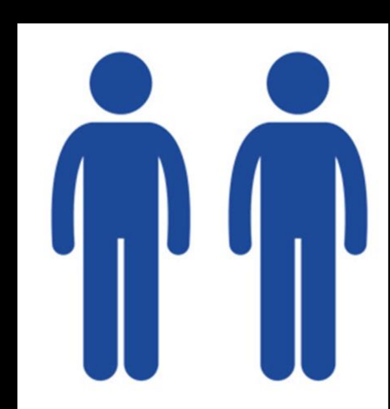
poiché $N(\mathrm{a},\bar{\mathrm{c}}) = N(\mathrm{a,o},\bar{\mathrm{c}}) + N(\mathrm{a},\bar{\mathrm{o}},\bar{\mathrm{c}})$

si dimostra che $N(\mathrm{a},\bar{\mathrm{c}}) \leq N(\mathrm{o},\bar{\mathrm{c}}) + N(\mathrm{a},\bar{\mathrm{o}})$

dividendo ogni termine per N_{TOT} otteniamo delle disuguaglianze valide per ogni composizione dell'insieme. Ad esempio $p(\mathrm{a},\bar{\mathrm{c}}) \leq p(\mathrm{o},\bar{\mathrm{c}}) + p(\mathrm{a},\bar{\mathrm{o}})$

Supponiamo ora che ogni persona abbia un gemello identico ⟶ le proprietà del primo gemello sono **correlate** con quelle del secondo.

Se separiamo una coppia e osserviamo le proprietà di uno dei due **conosciamo con certezza le proprietà dell'altro anche senza misurarle** e vale ad esempio



$$p(\mathrm{a}_1,\bar{\mathrm{c}}_2) \leq p(\mathrm{o}_1,\bar{\mathrm{c}}_2) + p(\mathrm{a}_1,\bar{\mathrm{o}}_2)$$

Disuguaglianze di Bell

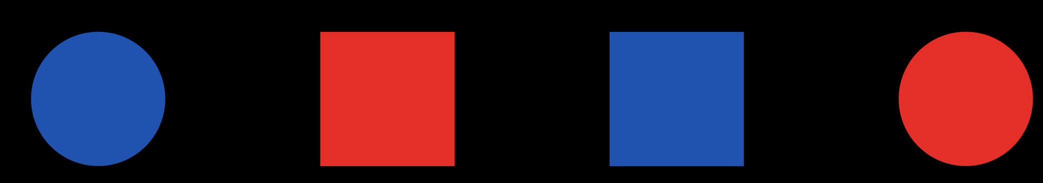
DIRE L'INDICIBILE
l'entanglement quantistico

ITALIAN QUANTUM WEEKS

QUANTO SIAMO LEGATI?
Correlazioni

Le **correlazioni** ci aiutano a rispondere a domande come:
- qual è la probabilità che due eventi accadano insieme?
- esiste un legame fra le diverse proprietà degli oggetti?

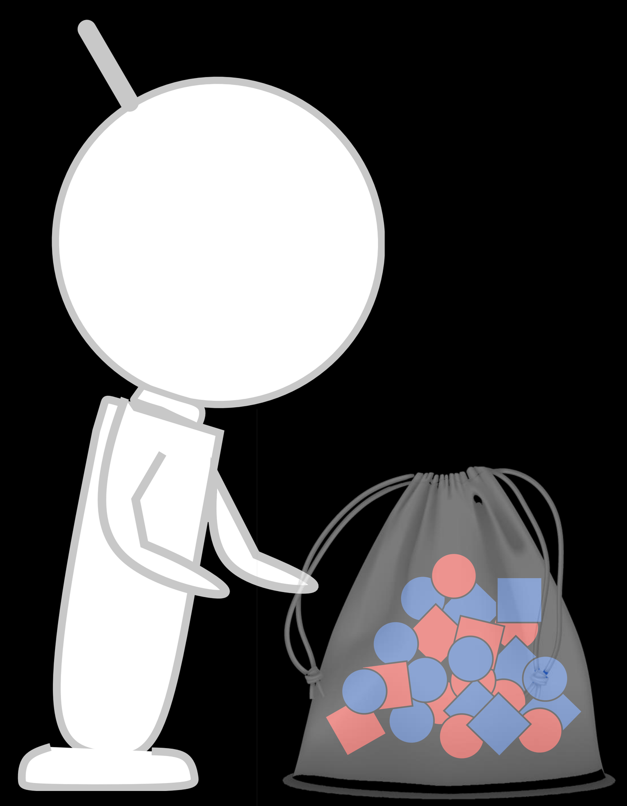
Prendiamo degli oggetti che possono avere solo due colori (**rosso** o **blu**) e due forme (tonda o quadrata)



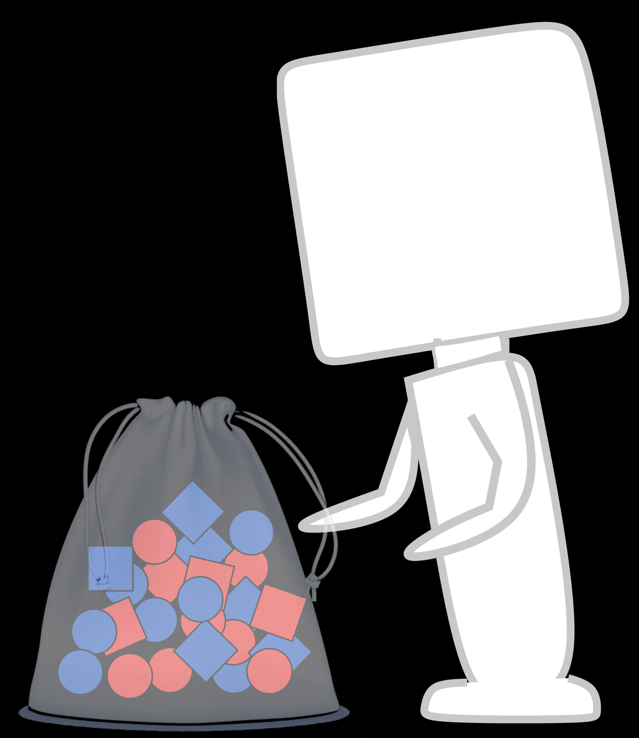
Per ciascun oggetto definiamo due **variabili casuali dicotomiche** ($\mathbf{C} =$ colore e $\mathbf{F} =$ forma) che possono assumere due valori, ad esempio +1 o -1

colore rosso	$\mathbf{C} = +1$	colore blu	$\mathbf{C} = -1$
forma ○	$\mathbf{F} = +1$	forma □	$\mathbf{F} = -1$

Dividiamo gli oggetti in due sacchetti. Alice e Bob **estraggono a caso un oggetto alla volta** e scrivono nella tabella il valore del colore e della forma dell'oggetto estratto.



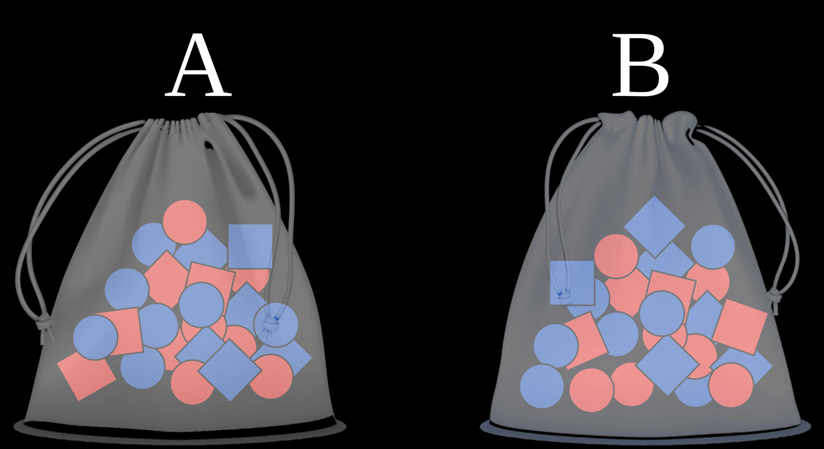
Oggetto Alice	a_C	a_F	b_C	b_F	Oggetto Bob
●	+1	+1	-1	+1	●
■	+1	-1	+1	+1	●
■	-1	-1	-1	-1	■
...	...	...	...	...	...



Possiamo calcolare le **correlazioni fra forma e colore** $\langle a_C b_C \rangle$, $\langle a_C b_F \rangle$, $\langle a_F b_C \rangle$, $\langle a_F b_F \rangle$

Per esempio dalla tabella sopra $\langle a_C b_C \rangle = \dfrac{(+1)(-1)+(+1)(+1)+(-1)(-1)+\dots}{N}$

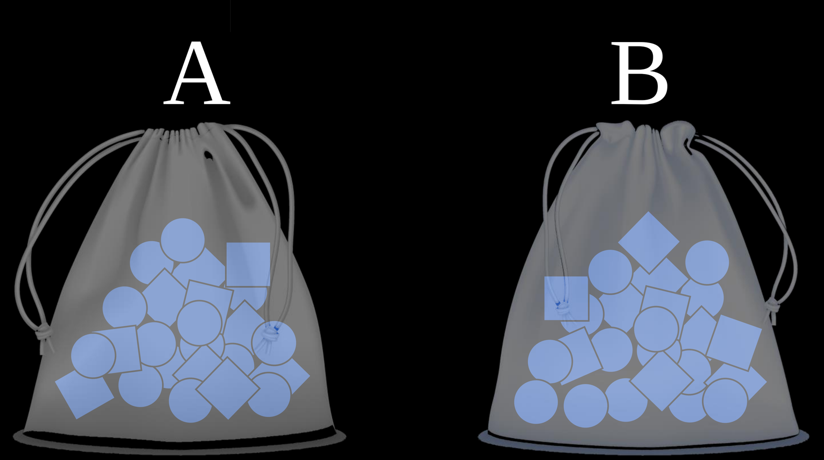
...dopo un numero abbastanza grande di estrazioni si ottiene...



...per sacchetti con oggetti con forme e colori casuali

$$\langle a_C b_C \rangle = \langle a_C b_F \rangle = \langle a_F b_C \rangle = \langle a_F b_F \rangle \approx 0$$

forma e colore di Alice e Bob **non** sono **correlati**



...per sacchetti con oggetti solo blu e forme casuali

$$\langle a_C b_C \rangle = 1 \qquad \langle a_C b_F \rangle = \langle a_F b_C \rangle = \langle a_F b_F \rangle \approx 0$$

solo i **colori** sono **correlati**

DIRE L'INDICIBILE
l'entanglement quantistico

ITALIAN QUANTUM WEEKS

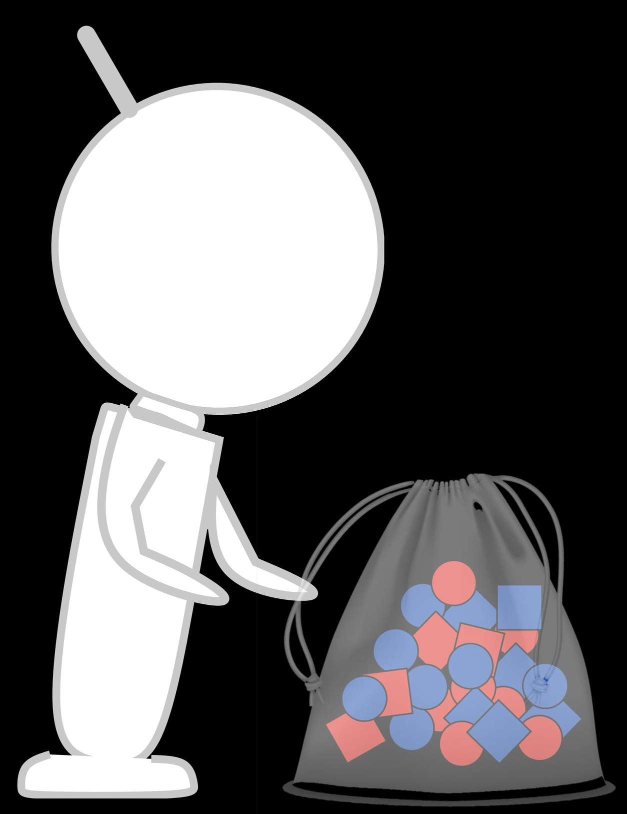
GIOCHIAMO CON LE CORRELAZIONI
La disuguagianza CHSH

Consideriamo ora il seguente gioco:

- Alice e Bob si dividono gli oggetti in due sacchetti.
- Alice e Bob eseguono una serie di estrazioni di oggetti
- senza comunicarselo, ogni volta osservano solo una delle due proprietà (colore o forma) e trascrivono il risultato.

Alla fine del gioco, avranno una tabella di questo tipo

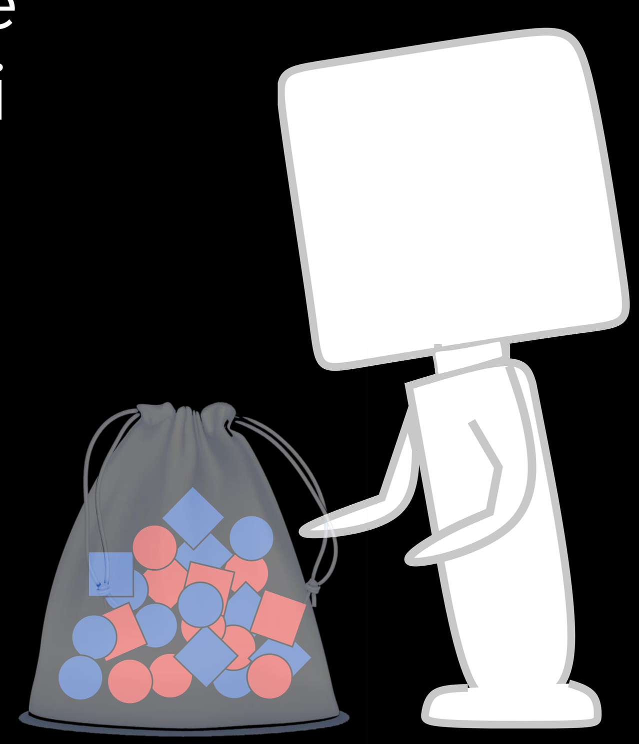
Oggetto Alice	proprietà	a_C	a_F	b_C	b_F	proprietà	Oggetto Bob
🔴	colore	+1			+1	forma	🔵
🟥	colore	+1		+1		colore	🔴
🟦	forma		-1		-1	forma	🟦
🔴	forma		+1		+1	forma	🔵
…		…	…	…	…		…



Consideriamo ora la seguente quantità, che possiamo costruire dalle varie correlazioni tra gli oggetti di Alice e Bob

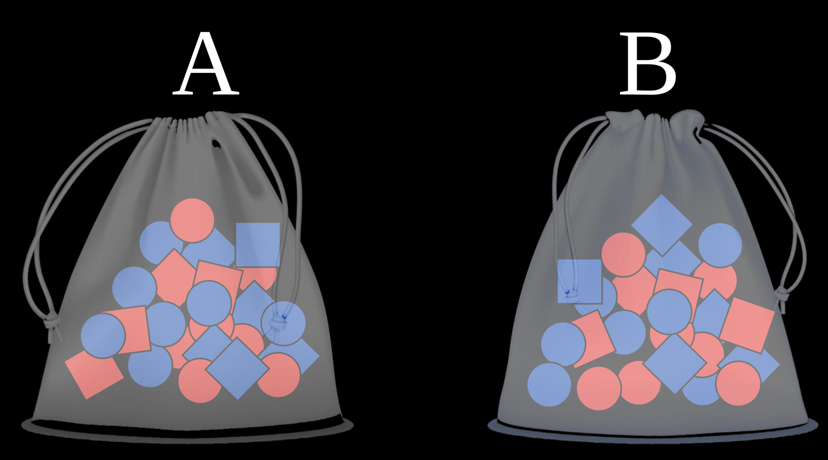
$$S = \langle a_C b_C \rangle + \langle a_C b_F \rangle + \langle a_F b_C \rangle - \langle a_F b_F \rangle$$

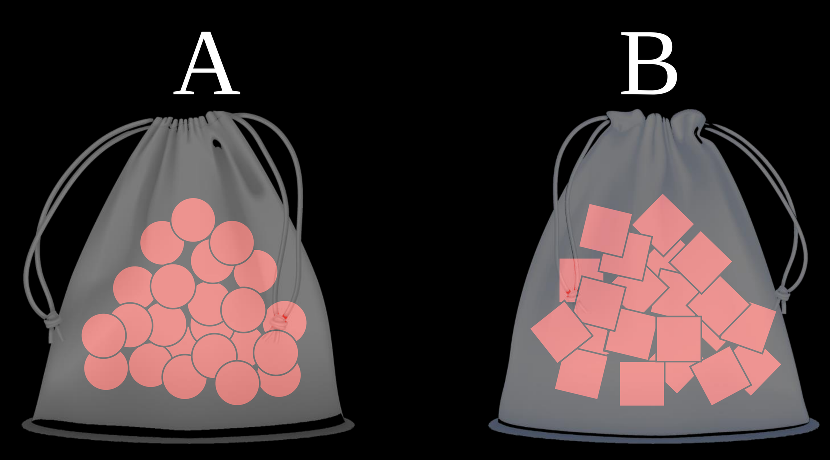
L'obiettivo del gioco per Alice e Bob è dividersi gli oggetti nei sacchetti in modo da avere il valore più alto del modulo di S



Alice e Bob hanno forme e colori casuali

$$S = 0$$





Alice ha tondi rossi e Bob quadrati rossi

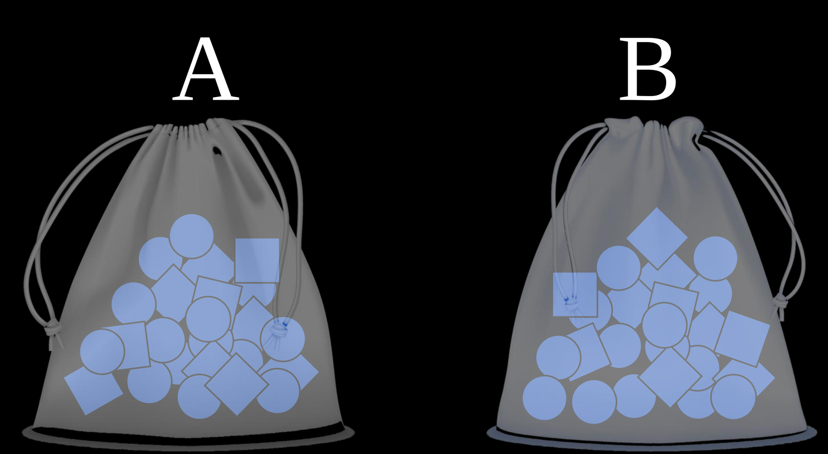
$$\langle a_C b_C \rangle = \langle a_F b_C \rangle = 1$$

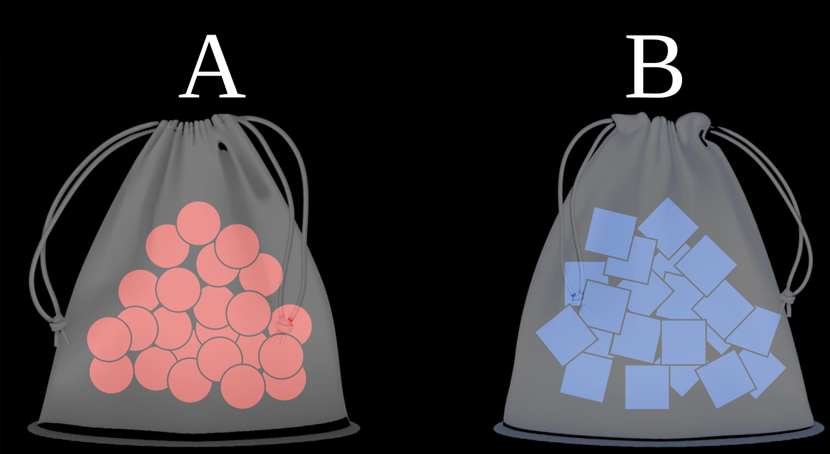
$$\langle a_C b_F \rangle = \langle a_F b_F \rangle = -1$$

$$S = 2$$

Alice e Bob hanno oggetti tutti blu e forme casuali

$$S = 1$$





Alice ha tondi rossi e Bob quadrati blu

$$\langle a_C b_C \rangle = \langle a_F b_C \rangle = -1$$

$$\langle a_C b_F \rangle = \langle a_F b_F \rangle = -1$$

$$S = -2$$

...indipendentemente da come si distribuiscono gli oggetti si ottiene sempre la **disuguaglianza CHSH**

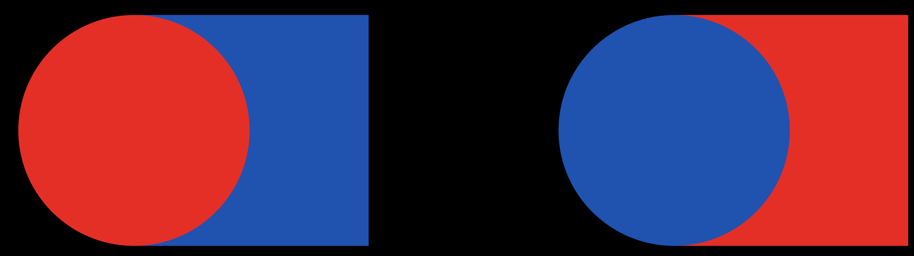
$$-2 \le S \le 2$$

DIRE L'INDICIBILE
l'entanglement quantistico

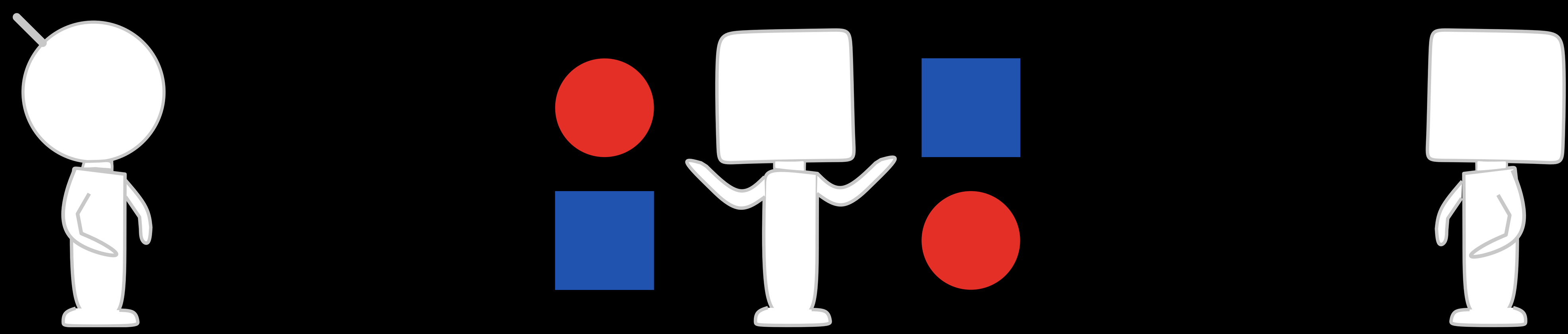
ITALIAN QUANTUM WEEKS

BELL ALLA PROVA
Limiti teorici delle disuguaglianze

Immaginiamo di avere oggetti che sono per metà cerchi e per metà quadrati, e per metà rossi e per metà blu.

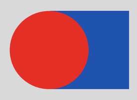
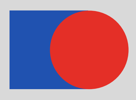
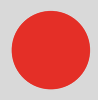
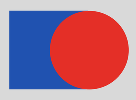
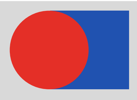


1. Charlie, un amico di Alice e Bob, prende uno degli oggetti, ne fa molte copie uguali, divide ogni copia a metà e ne passa una parte ad Alice e l'altra a Bob.



2. Alice e Bob, **senza comunicare tra loro**, osservano solo una delle due proprietà (colore C o forma F) e trascrivono il risultato.

3. Confrontando le loro misure dopo molte ripetizioni, trovano che $S = -2$

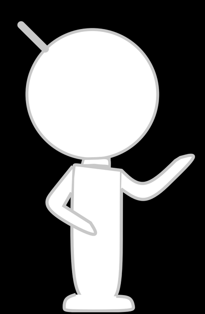
Oggetto Alice	proprietà	a_C	a_F		b_C	b_F	proprietà	Oggetto Bob
	colore	+1				-1	forma	
	colore	-1			+1		colore	
	forma		-1			+1	forma	
	forma		+1		-1		colore	
...		...	...		...	...		...

Le regole sono:
- Alice e Bob, a priori, **non sanno quale oggetto è stato scelto**.
- Ma non appena uno dei due, diciamo Alice, misura il colore della sua metà e trova rosso, sa per certo che se anche Bob misura il colore troverà blu.
- Lo stesso vale per la forma: non appena Alice misura la forma e scopre di avere un cerchio, sa che se anche Bob misura la forma troverà necessariamente un quadrato.

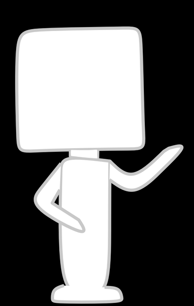
L'ipotesi di località è necessaria: la scelta di Alice di misurare il colore o la forma non deve influenzare i risultati di Bob (e viceversa)

In generale:

Alice e Bob possono scegliere tra due misure



A_1
A_2



B_1
B_2

con possibili valori

$a_1 = \{-1, +1\}$
$a_2 = \{-1, +1\}$
$b_1 = \{-1, +1\}$
$b_2 = \{-1, +1\}$

Se calcolano

$$S = \langle a_1 b_1 \rangle + \langle a_1 b_2 \rangle + \langle a_2 b_1 \rangle - \langle a_2 b_2 \rangle$$

nell'**ipotesi di località** ottengono che **vale sempre la disuguaglianza CHSH** $-2 \le S \le 2$ che è una forma particolare delle

disuguaglianze di Bell

Ci sono situazioni quantistiche in cui le disuguaglianze di Bell sono **violate**!